§ 5. ОБОБЩЕННЫЕ КООРДИНАТЫ СИСТЕМЫ

Пусть система состоит из N точек и, следовательно, ее положение в пространстве в каждый момент времени определяется $3N$ координатами точек системы, например декартовыми

x_k, y_k, z_k. Предположим, что на систему наложены голономные связи, уравнения которых в общем случае могут содержать и производные от координат точек, но после их интегрирования они свелись к геометрическим и имеют форму

$$f_s(x_k, y_k, z_k, t)=0, \quad s=1, 2, \ldots, l. \tag{10}$$

Освобождающие связи, выражающиеся неравенствами, не рассматриваются. Таким образом, $3N$ координат связаны l уравнениями и независимых координат будет $n=3N-l$.

Любые n декартовых координат можно задать независимо друг от друга. Остальные координаты определятся из уравнений связей. Вместо n независимых декартовых координат можно выбрать любые другие независимые параметры $q_1, q_2, \ldots, q_n$, зависящие от всех или части декартовых координат точек системы. Эти *независимые параметры, определяющие положение системы в пространстве, называются обобщенными координатами системы*. В общем случае они могут зависеть от всех декартовых координат точек системы, т. е.

$$q_i=q_i(x_k, y_k, z_k), \tag{11}$$

где k изменяется от 1 до N. Задание обобщенных координат полностью определяет положение точек системы относительно выбранной системы отсчета, например декартовых осей координат.

У свободной точки три обобщенные координаты. Если точка должна двигаться по заданной поверхности, то обобщенных координат только две и т. д. Используя уравнения связей (10) и выражения обобщенных координат через декартовы (11), можно при выполнении условий разрешимости этой системы уравнений выразить декартовы координаты через обобщенные, т. е. получить

$$x_k=x_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, t); \quad y_k=y_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, t);$$
$$z_k=z_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, t).$$

Соответственно для радиуса-вектора каждой точки системы $\bar{r}_k=x_k\bar{i}+y_k\bar{j}+z_k\bar{k}$ получим

$$\bar{r}_k=\bar{r}_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, t). \tag{12}$$

В случае стационарных связей время явно не входит в уравнения связей. Поэтому и в (12) оно войдет только неявно, через обобщенные координаты, если система движется. Для голономных систем вектор возможного перемещения точки $\delta\bar{r}_k$ в соответствии с (12) можно выразить в форме

$$\delta\bar{r}_k=\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_2}\delta q_2+\ldots+\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_n}\delta q_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i. \tag{13}$$

Система, имеющая n независимых обобщенных координат, характеризуется также n независимыми возможными переме-

щениями или вариациями $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$, если связи голономны. Для голономных систем число независимых возможных перемещений совпадает с числом независимых обобщенных координат. Следовательно, *число степеней свободы голономной системы равно числу независимых обобщенных координат этой системы*, т. е. $n=3N-l$.

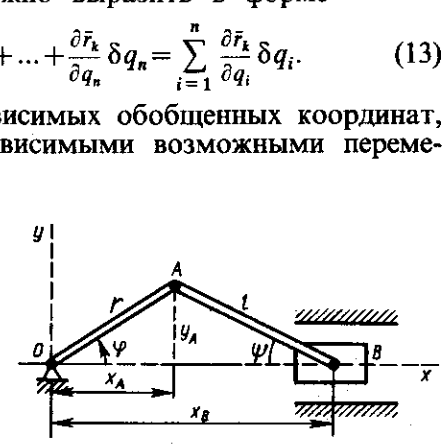

Рис. 98

Для неголономных систем в уравнения связей (10) могут входить производные от декартовых координат точек и даже могут быть такие уравнения связей, в которые входят только одни производные. Такие уравнения связей наложат ограничения на вариации $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$ и, следовательно, уменьшат число независимых вариаций, не связывая функциональной зависимостью сами обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Для неголономных систем в общем случае число независимых вариаций (возможных перемещений) меньше числа обобщенных координат. *Число степеней свободы неголономной системы, равное числу независимых возможных перемещений, тоже меньше числа обобщенных координат системы.*

В дальнейшем рассматриваются только голономные системы, т. е. системы с голономными связями. Рассмотрим вопрос обобщенных координат на примере простого механизма.

Пусть имеем кривошипно-шатунный механизм (рис. 98). Его положение на плоскости вполне определяется заданием положения трех его точек O, A и B с координатами соответственно $(0, 0)$, (x_A, y_A), $(x_B, 0)$. Координат, не равных нулю, только 3, т. е. $3N=3$. Можно составить два уравнения связей, учитывая постоянство длин $OA=r$ и $AB=l$. Имеем

$$x_A^2+y_A^2=r^2; \quad (x_B-x_A)^2+y_A^2=l^2. \tag{а}$$

Число степеней свободы

$$n=3-2=1.$$

Из трех не равных нулю координат только одну можно задать независимо. Две другие выразятся через нее как решения уравнений связей. В качестве независимой координаты можно выбрать любую из трех координат x_A, y_A, x_B или любую комбинацию этих координат. Нужно только, чтобы она однозначно определяла положение механизма относительно осей координат Oxy. Координаты x_A и x_B следует исключить. Они неоднозначно определяют положение механизма. Удобно в качестве независимой обобщенной координаты q выбрать угол φ, т. е.

$$q=\varphi=\operatorname{arctg}\frac{y_A}{x_A}. \tag{б}$$

Из уравнений (а) и (б) координаты x_A, y_A, x_B можно выразить через угол φ. Для этого следует решить эту систему уравнений относительно координат. Удобно, не решая системы уравнений, выразить координаты через угол φ, используя рис. 97. Получим

$$x_A=r\cos\varphi, \quad y_A=r\sin\varphi, \quad x_B=r\cos\varphi+l\cos\psi.$$

Но

$$y_A=r\sin\varphi=l\sin\psi; \quad \sin\psi=\frac{r}{l}\sin\varphi;$$

$$\cos\psi=\sqrt{1-\sin^2\psi}=\frac{1}{l}\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}.$$

С учетом этого искомые выражения для координат принимают форму

$$x_A=r\cos\varphi; \quad y_A=r\sin\varphi; \quad x_A=r\cos\varphi+\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}.$$

Нетрудно проверить, что эти значения декартовых координат удовлетворяют системе уравнений (а) и (б).